



TITLE:

側面加熱による対流系の時空間構造(熱対流の数理)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

CITATION:

八幡, 英雄. 側面加熱による対流系の時空間構造(熱対流の数理). 数理解析研究所講究録 1996, 970: 21-31

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60686>

RIGHT:

側面加熱による対流系の時空間構造

広島大・理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

直方体容器 $\{(x, y, z) : 0 < x < L, 0 < y < H, 0 < z < D\}$ に流体をいれ、 y 軸の方向を重力の負の向きにとる。いま yz 平面 $x = 0, x = L$ における 2 枚の垂直側壁を温度 T_1, T_2 の等温度壁、 xz 平面 $y = 0, y = H$ における 2 枚の水平壁を断熱壁に保つとき、容器内に現れる対流の時空間パターンを考える。その際、流体運動は z 軸方向の成分をもたず一様であると仮定して、ある 1 枚の xy 平面上の 2 次元運動として扱うことのできる場合に話を限る。この近似が実験的にあてはまるパラメータ領域があることは知られており、また多くの理論的研究もこの近似のもとでおこなわれているが、その妥当性の範囲は必ずしも明らかではない。¹⁻⁴⁾

そこで問題は、長方形領域 $\{(x, y) : 0 < x < L, 0 < y < H\}$ (ここで重力は y 軸の負の向きにとる) 内に閉じこめられた 2 次元流体を、一方の垂直境界壁で一様に加熱した場合、すなわち、温度場 $T(x, y)$ を境界条件

$$T(0, y) = T_1, T(L, y) = T_2 \quad (0 < y < H, T_1 > T_2) \quad (1)$$

$$\partial_y T(x, 0) = \partial_y T(x, H) = 0 \quad (0 < x < L) \quad (2)$$

に保ち、速度場を、各側壁で滑りなしの境界条件 $\mathbf{v} = \partial_n \mathbf{v} = 0$ (ここで、 n は壁面に垂直な単位ベクトル) に保つとき発生する対流の場の時空間パターンを考察することである。 ν を動粘性率、 α を熱膨張率、 g を重力加速度として、座標 x, y 、時間 t 、速度 \mathbf{v} 、温度 T を次のように無次元化する: $x \rightarrow Lx, y \rightarrow Hy, t \rightarrow (L^2/\nu)t, \mathbf{v} \rightarrow U\mathbf{v}, T \rightarrow T_2 + (T_1 - T_2)T$ 、ここで、 $U = g\alpha(T_1 - T_2)L^2/\nu$ は粘性項と浮力項のつりあい $\nu U/L^2 \sim g\alpha(T_1 - T_2)$ を特徴づける速度である。これらの変数をもちいると無次元化された運動方程式は Boussinesq 近似で、

$$\partial_t \mathbf{v} + G\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \Pi + \nabla^2 \mathbf{v} + T\mathbf{e}_y \quad (3)$$

$$\partial_t T + G\mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

の形をとる。ここで、 $\nabla = (\partial_x, (1/A)\partial_y)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1)$ で、方程式は 3 個の無次元数: アスペクト比 $A = H/L$, Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$, Grashof 数 $G = UL/\nu$ によって特徴づけられている、ただし κ は温度伝導率を表す。

この問題は、Benard 対流とは異なって、 $G \neq 0$ であれば、閾値なしに対流が存在し、 G の増大とともに温度の安定成層が発達する。またこの対流ははじめは定常的であるが、 G を増加させたとき TS 波または内部重力波が発生し振動対流へと遷移する。その様子が系を特徴づけるパラメータ A, Pr の値によってどのように異なるかについては、多くの研究がある。⁶⁻¹¹⁾

ここでは TS 波が卓越した振動であることが知られている A, Pr のパラメータ領域から $A = 6, Pr = 0.71$ の場合を選び、 G を増加していったときどのように対流場の時空間パターンが変化するか筆者の行った数値計算の結果の概略を報告する。速度の成分を $\mathbf{v} = (u, v)$ として、方程式系 (3)-(5) を、流れ関数 $\psi (u = (1/A)\partial_y \psi, v = -\partial_x \psi)$ 、渦度 $\omega = -\partial_x v + (1/A)\partial_y u$ を用いて表すと、

$$\partial_t \omega = \frac{G}{A} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \nabla^2 \omega - \partial_x T \quad (6)$$

$$\partial_t T = \frac{G}{A} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, y)} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (7)$$

$$\nabla^2 \psi = \omega \quad (8)$$

となる。ここで、ヤコビアンは Arakawa 法、ラプラシアンは DuFort-Frankel 法によって差分化し、得られた差分方程式をアスペクト比 $A = 6$, Prandtl 数 $Pr = 0.71$ の場合に、 G を増加させながら各 G の値に対して数値 simulation を行なった。ただし、(8) は SOR 法によって解いた。差分格子分割は x 方向に 80, y 方向に 80 の等分割とした。

Grashof 数 G を増加させると、 $G \sim 6 \times 10^5$ で定常状態から時間的振動状態に遷移する。これは TS 波であることが知られており、⁸⁾ 以下これを fast mode、その振動数を f_1 と記す。図 1 に $G = 8 \times 10^5$ における流れ関数 $\psi(x, y, t)$ 、渦度 $\omega(x, y, t)$ 、温度場 $T(x, y, t)$ の空間パターンのある時刻 t における snapshot を示す。以下空間パターンの図では、表示の便宜上 y 軸方向を $1/6$ に縮尺し正方形領域になるように描くことにする。

温度場においては、側壁で境界層が発達し、中央部分では安定成層が成長していることがわかる。さらに G を増加させると f_1 よりも低い振動数 f_2 で振動する slow mode が加わり、系の運動は準周期的となる。図 2、図 3 は G をさらに増加させたとき、phase-locked 状態を経て chaos 状態に遷移し運動が非周期的になる様子を、phase-portrait と Poincare 断面によって示す。今扱っている 2 次元流体運動に現れる非周期的運動は、低次元力学系に典型的に現れる分岐列を経て出現していることにより、その発生原因を低次元カオスによって説明しうるように思われる。

次に 2 個の振動モード fast mode f_1 と slow mode f_2 がどのような空間パターンを示すかしらべる。図 5 は運動が fast mode のみからなる $G = 8 \times 10^5$ における mono-periodic 状態において、振動の 1 周期 $1/f_1$ にわたる温度場の空間パターンをいくつかの時刻において示す。これだけでは、流体運動のパターンを明瞭にみることはできないが、少なくとも運動が境界層に沿って大きな振幅をもち水平壁に衝突して水平方向の運動に転化していることがわかる。次に、slow mode の空間パターンを求めるために振動数領域で low pass filter をかけて fast mode の高振動数スペクトル成分 f_1 を除去することを考える。図 6(a) は準周期的運動における空間のある 1 点での温度場の時系列を示し、図 6(b) はこれのパワースペクトル $\log_{10} P(f)$ を示す。ここで振動数成分 $f < 200$ のみを通過させる長方形 low pass filter を施し ($f > 200$ のスペクトル成分はゼロにおく)、それを逆フーリエ変換して図 6(c) の slow mode にたいする時系列をうる。図 7 に図 6(c) の振動の 1 周期にわたる空間パターンを示す。図 5 に示した fast mode のパターンと比べて、振幅の大きな部分が水平方向に幅広く系全体に広がっていることがわかる。これを内部重力波と同定するにはまだ証拠不足であるが、2 つの振動モードのそれぞれ活動的な場所が異なっているのは明らかである。

最後に、図 6(a) と (c) の 2 つの時系列 (空間の異なった点を考慮するとそれぞれ 80×80 本の時系列からなる) の主成分分析をして、時間的に平均して卓越している空間パターンを抽出した結果を示す。¹²⁾ 図 8(a),(b) は、図 6(a) の原時系列を主成分分析して固有値の大きい方から 2 個固有ベクトルをとり、それらの空間パターンを示したものである (3 番目以降の固有値はずっと小さくなるので対応する固有ベクトルの図は省略した)。これをみると平均として図 5 のパターンと類似していることが見て取れる。一方、図 8(c) は図 6(c) の slow mode の時系列に主成分分析をして、最も寄与の大きい

最大固有値をとる固有ベクトルの空間パターンを示す。これは当然ながら図7と類似している。

これら空間パターンの時間変化をよりよく理解するには動画をつくることが有効であろうが、これは今後の課題としたい。

参考文献

- 1) D.J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics, 2nd ed.* (Clarendon Press, 1988), p.37.
- 2) J.W. Elder, *J. Fluid Mech.* **23**(1965), 77.
- 3) Y. Lee and S.A. Korpela, *J. Fluid Mech.* **126**(1983), 91.
- 4) J. Patterson and J. Imberger, *J. Fluid Mech.* **100**(1980), 65.
- 5) J. Mizushima and K. Gotoh, *J. Fluid Mech.* **73**(1976), 65.
- 6) R.F. Bergholz, *J. Fluid Mech.* **84**(1978), 743.
- 7) D.R. Chenoweth and S. Paolucci, *J. Fluid Mech.* **169**(1986), 173.
- 8) S. Paolucci and D.R. Chenoweth, *J. Fluid Mech.* **201**(1989), 379.
- 9) R. Henkes and C.J. Hoogendoorn, *Appl. Sci. Res.* **47**(1990), 195.
- 10) P. Le Quere and T. Alziary de Roquefort, *J. Comp. Phys.* **57**(1985), 210.
- 11) A.Yu. Gelfgat and I. Tanasawa, *Num. Heat Transfer* **A25**(1994), 627.
- 12) L. Sirovich and H. Park, *Phys. Fluids* **A2**(1990), 1649; 1659.

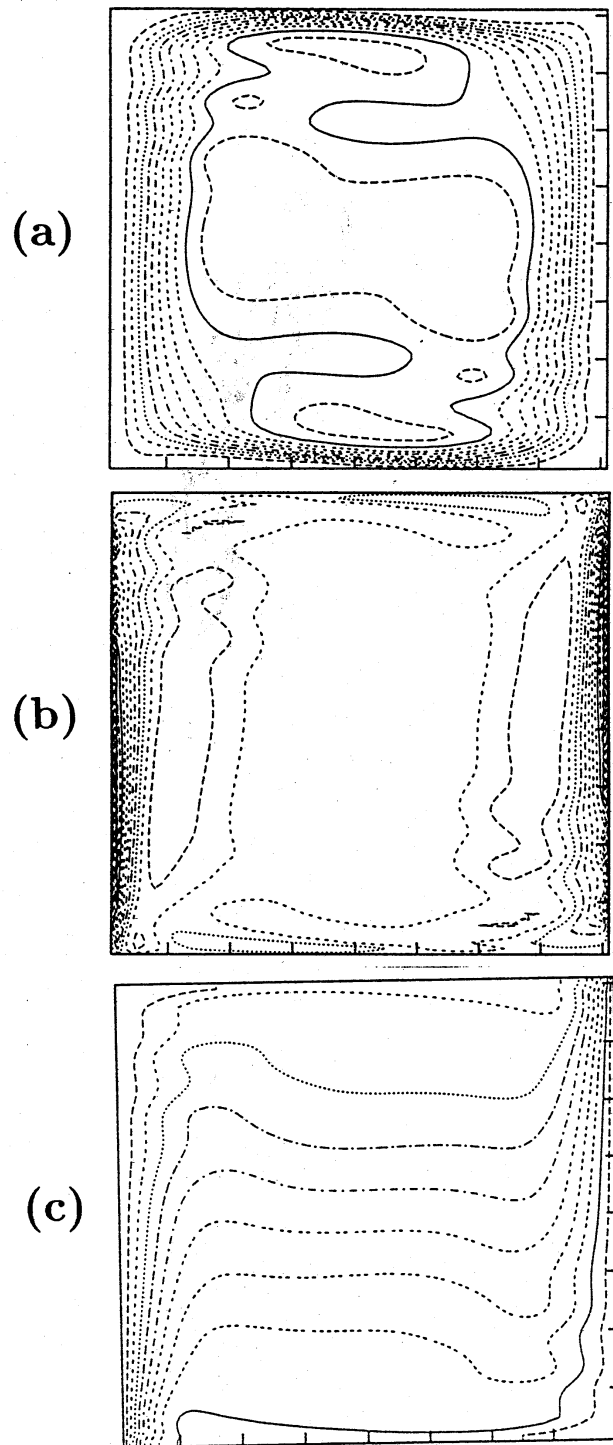


図1. 対流場の空間パターンの snapshot. $G = 8 \times 10^5$, $Pr = 0.71$, $A = 6$ (便宜上空間パターンは y 軸方向を $1/6$ に縮尺し正方形領域になるように描いた.) (a) 流れ関数 $\psi(x, y)$, (b) 渦度 $\omega(x, y)$, (c) 温度場 $T(x, y)$.

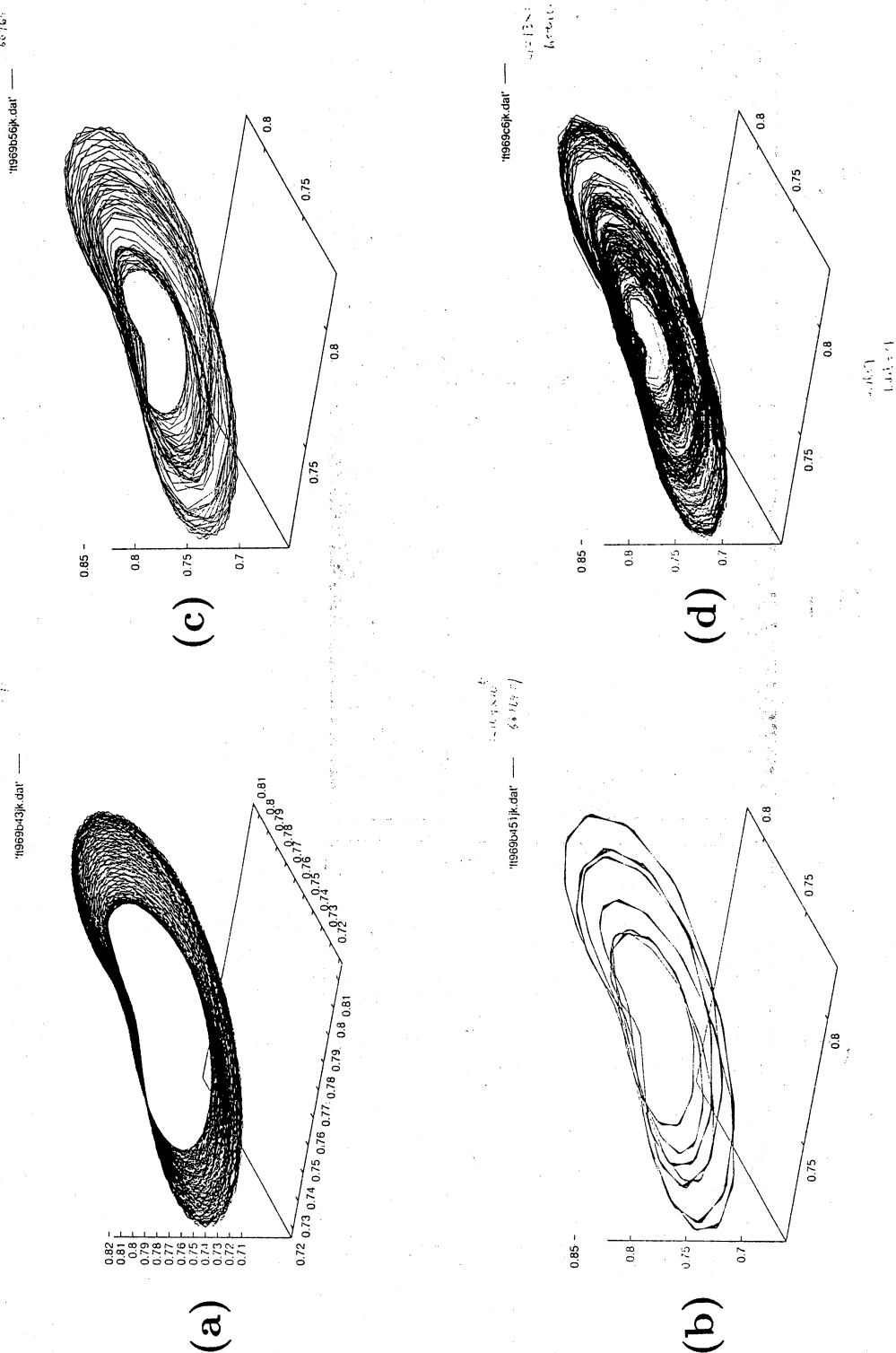


図2. 空間のある1点の温度の時系列より Takens の方法によって構成した解軌道の phase portrait. (a) $G = 11.5 \times 10^5$, (b) $G = 11.9 \times 10^5$, (c) $G = 12.1 \times 10^5$, (d) $G = 13.0 \times 10^5$.

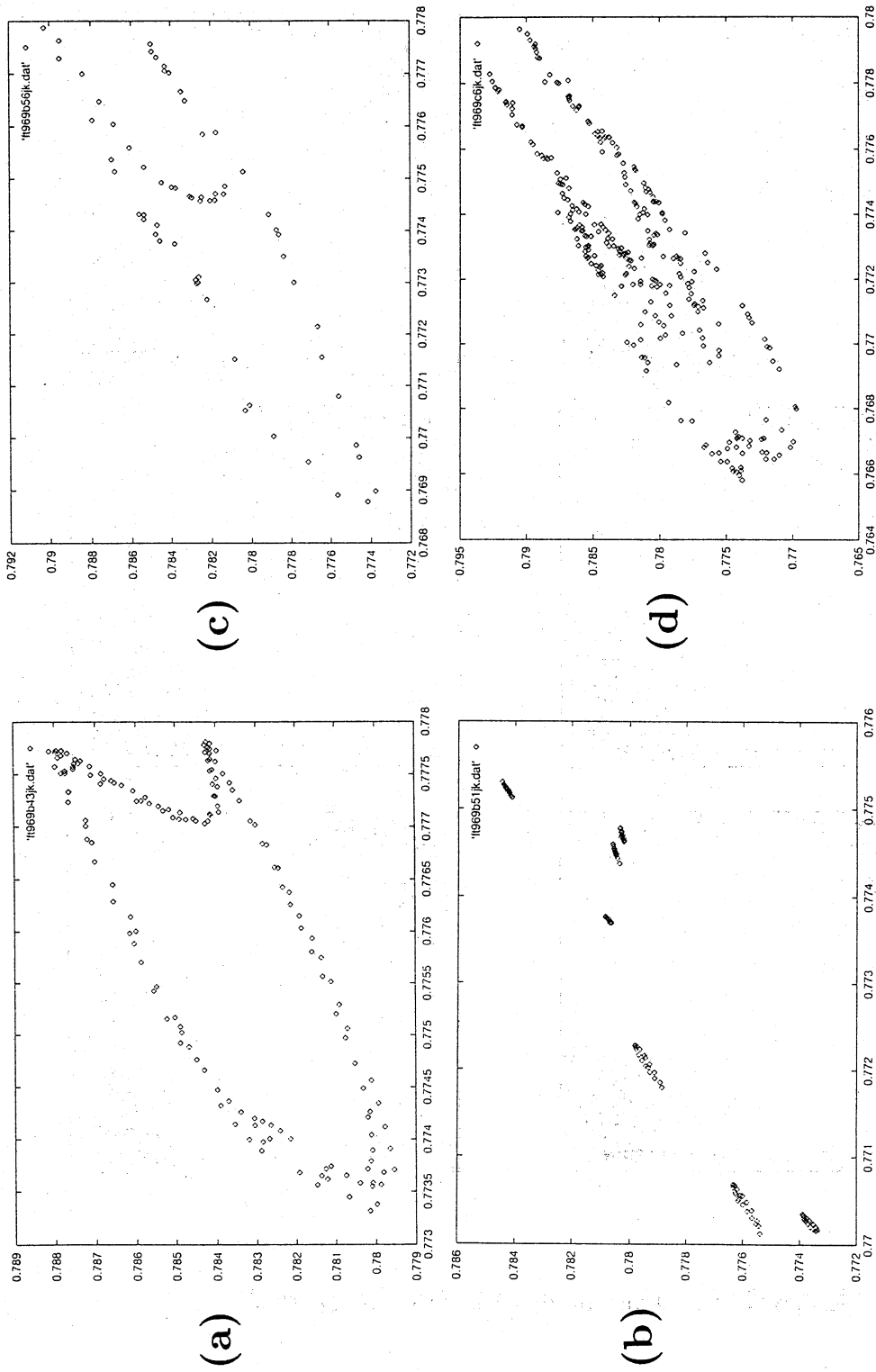


図3. 図2のphase portrait より構成したPoincare 断面図. (a) $G = 11.5 \times 10^5$, (b) $G = 11.9 \times 10^5$, (c) $G = 12.1 \times 10^5$, (d) $G = 13.0 \times 10^5$.

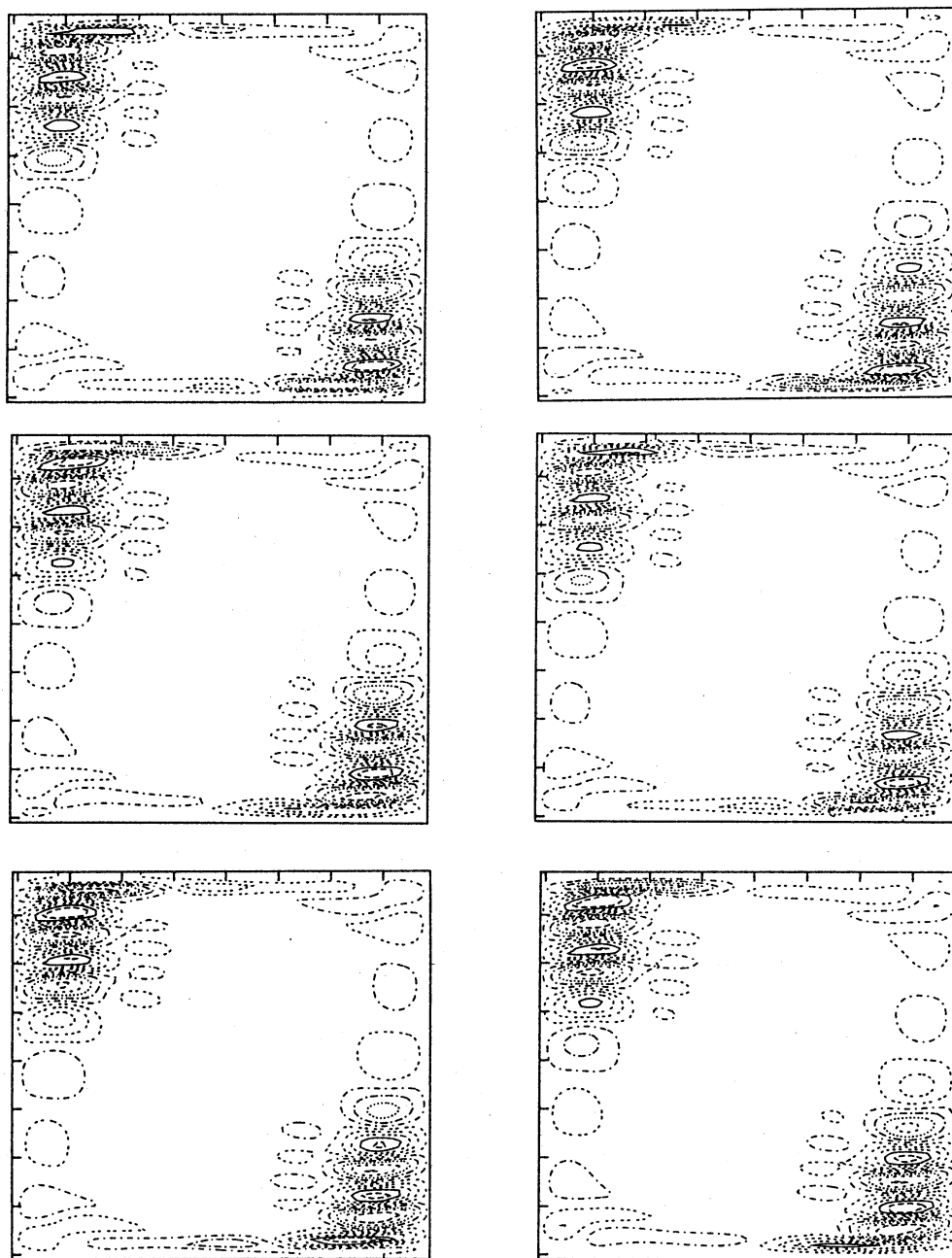


図4. 振動数成分 f_1 の fast mode の1周期にわたる空間パターンの変化.

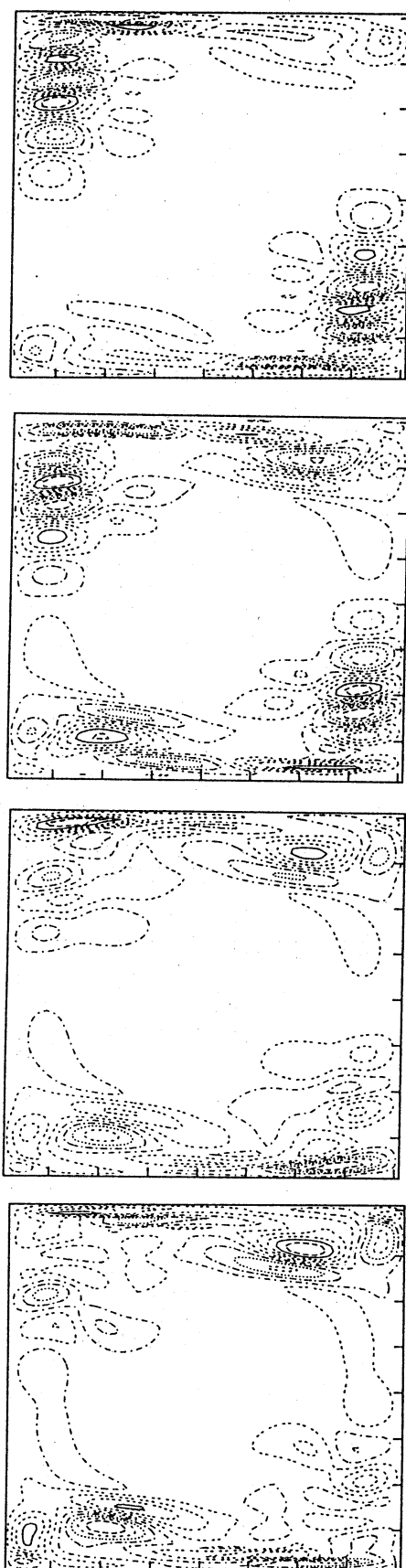


図 6. 振動数成分 f_2 の slow mode の 1 周期にわたる空間パターンの変化.

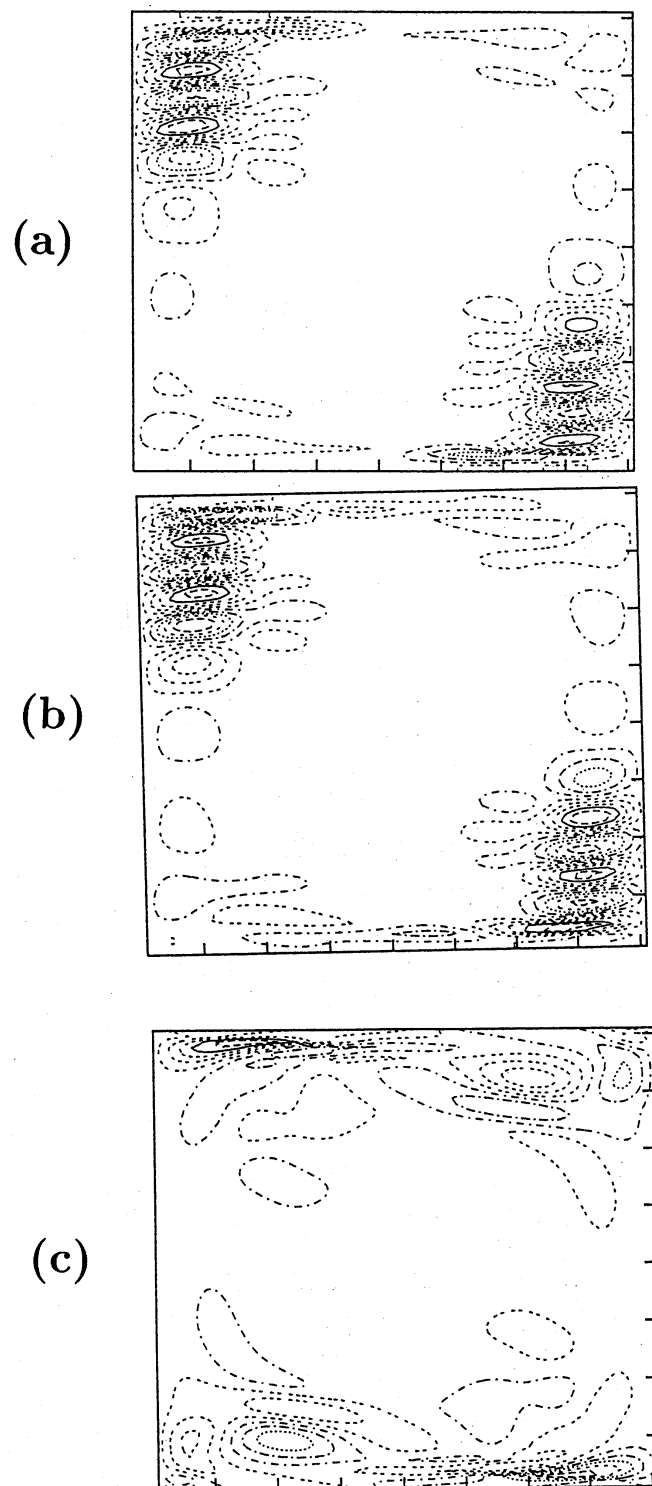


図7. 時系列の主成分分析による固有ベクトルの空間パターン. (a) 図5(a)の時系列にたいする最大固有値に対応する固有ベクトル. (b) 図5(b)の時系列にたいする2番目に大きい固有値に対応する固有ベクトル. (c) 図5(c)のslow modeの時系列にたいする最大固有値に対応する固有ベクトル.

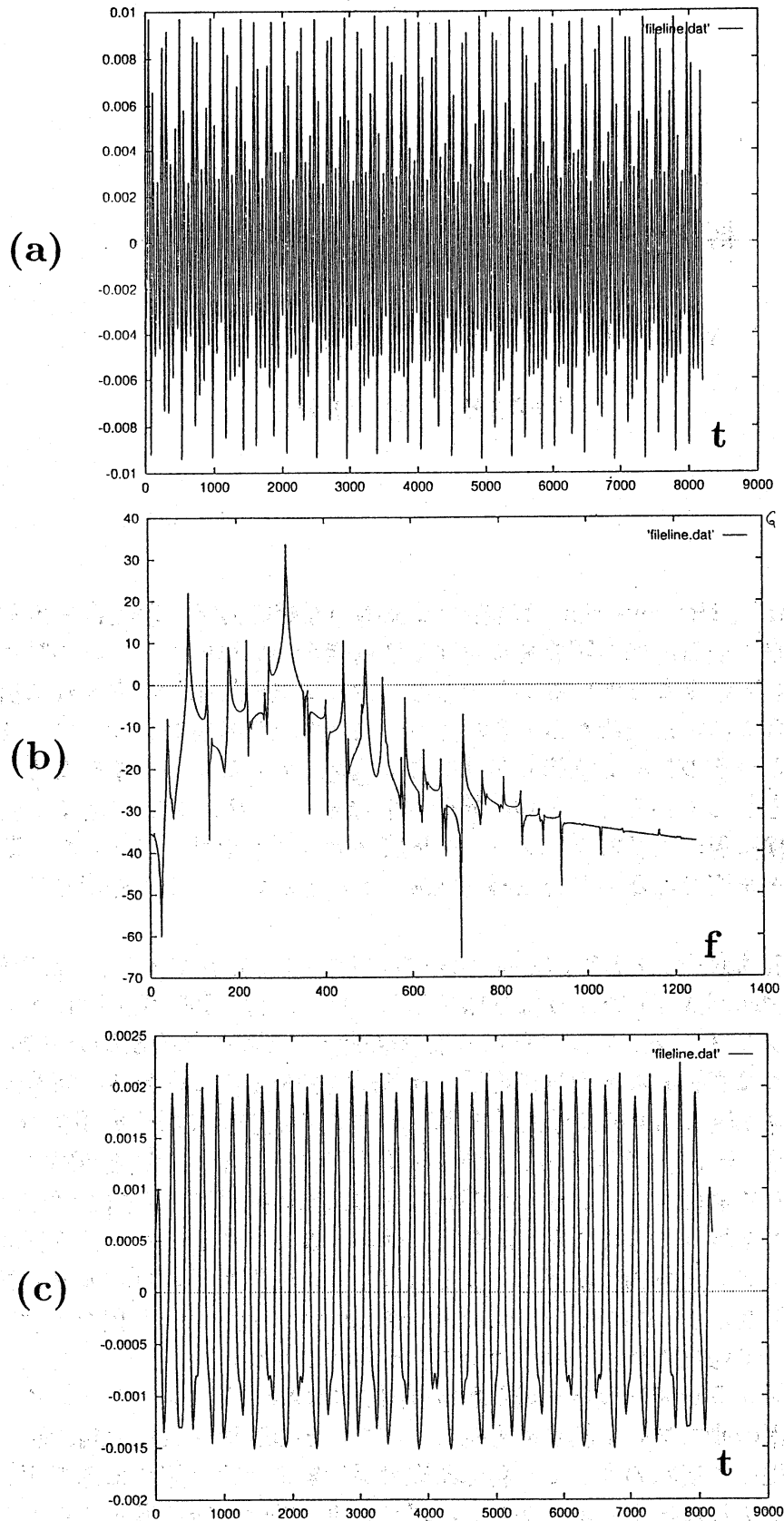


図 5. (a) 局所的溫度場の時系列, ただし、 t の単位は $5 \times 10^{-5} L^2 / \nu$. (b) 図 (a) にたいするパワースペクトル (PSD) $\log_{10} P(f)$, ただし、 f の単位は $2.4\nu/L^2$, (c) 図 (b) の PSD で low-pass filter をかけた後, 逆フーリエ変換して得た slow mode の時系列. $G = 11.5 \times 10^5$, $Pr = 0.71$, $A = 6$.